219

Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace de Banach

I] Existence et unicité d'extremums

Définition 1 : Soit $U \subseteq E$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local en a s'il existe $V \in \mathcal{V}_a$ tel que : $\forall x \in V \cap U$, $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).
Lorsque l'inégalité est vraie pour tout $a \in U$, on dit que f admet un maximum (resp. minimum) global.
Lorsque l'inégalité est stricte pour $x \neq a$, on parle de maximum (resp. minimum) strict. [El Am] I.1

1] Fonctions continues sur un compact

Théorème 2 : Toute fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. I.3

Exemple 3 : La fonction cosinus est bornée sur tout compact et atteint ses bornes : -1 et 1.

Application 4 : Soit $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ deux compacts. [Go Ar] ex 3
Alors : $\exists (x_1, x_2) \in K_1 \times K_2 \mid d(x_1; x_2) = d(K_1; K_2) = \inf_{(x,y) \in K_1 \times K_2} \{d(x,y)\}$

Application 5 : Soit E espace compact, $f : E \to E$ telle que : ex 4
$\forall x, y \in E$, $x \neq y \Rightarrow d(f(x); f(y)) < d(x,y)$
Alors : f admet un unique point fixe

2] Fonctions et parties convexes

Définition 6 : On dit que $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est convexe si : I.3
$\forall x, y \in U$, $\forall \lambda \in [0;1]$, $\lambda x + (1-\lambda) y \in U$.
Soit $U \subseteq E$ convexe. On dit que $f : U \to \mathbb{R}$ est convexe si $\forall x, y \in U$, $\forall \lambda \in [0;1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ et f est strictement convexe si $\forall x \neq y$, $\forall \lambda \in]0;1[$, $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. [El Am]
On dit que f est concave si $-f$ est convexe.

Théorème 7 : Soit $U \subseteq E$ convexe, $f : U \to \mathbb{R}$ convexe, $a \in \mathring{U}$ tel que $d_a f = 0$. I.3 [El Am]
Alors : f admet un minimum global au point a.
Si de plus f est strictement convexe, alors ce minimum est strict.

Théorème 8 : (de projection) Soit $(H; \langle ; \rangle)$ un espace de Hilbert, $C \subseteq H$ convexe fermé non-vide de H. II.2 [Li]
Alors : $\forall x \in H$, $\exists! \, p_C(x) \in C \mid \|x - p_C(x)\| = d(x; C)$
De plus $p_C(x)$ est caractérisé par : $p_C(x) \in C$ et $\forall z \in C$,
$\mathrm{Re} \langle x - p_C(x) ; z - p_C(x) \rangle \leq 0$.

Application 9 : (Théorème de représentation de Riesz) Soit $(H; \langle ; \rangle)$ espace de Hilbert.
Alors : $\forall \Phi \in H^*$, $\exists! \, y \in H \mid \forall x \in H$, $\Phi(x) = \langle x | y \rangle$

3] Points extrémaux d'un convexe

Définition 10 : Soit $K \subseteq E$ convexe. On dit que $x \in K$ est un point extrémal de K si : $\forall x, y \in K$, $\forall \lambda \in [0;1]$, si $x = \lambda x + (1-\lambda) y$ alors $x = y$ ou $\lambda \in \{0;1\}$. On note $\mathcal{E}(K)$ leur ensemble. [Les]

Théorème 11 : (de Krein-Milman) (admis) Tout convexe compact d'un espace affine de dimension finie est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Théorème 12 : (de Choquet) Soit $(E; \|\cdot\|)$ ev normé de dimension finie, K convexe compact de E tel que $\mathcal{E}(K)$ est compact, $\ell : E \to \mathbb{R}$ linéaire, continue sur E.
Alors : ℓ atteint un minimum sur K en un point extrémal de K

Théorème 13 : (de Birkhoff) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et B_n l'ensemble :
$B_n := \{A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n([0;1]) \mid \forall i, j \in [\![1;n]\!], \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1\}$
Alors : les points extrémaux de B_n sont les matrices de permutations : $\mathcal{E}(B_n) = P_\sigma$

II] Lien avec le calcul différentiel

1] Conditions du premier ordre

Soit par la suite $U \subseteq E$ ouvert non-vide.

Définition 14 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$. On dit que f admet un point critique en a si $d_a f = 0$.

Proposition 15 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en $a \in U$.
Alors : si f admet un extremum local en a, alors $d_a f = 0$

Contrexemple 16 : (1) L'hypothèse que U ouvert est vitale.
Soit $f : \begin{array}{l} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ admet un maximum en 1 mais $f'(1) = 2 \neq 0$.
(2) La contraposée est fausse.
$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{array}$ vérifie bien $f'(0) = 0$ mais $f(0)$ n'est ni un minimum, ni un maximum.

Remarque 17 : On a $\{\text{extremums locaux}\} \subseteq \{\text{points critiques}\}$

2] Conditions du second ordre

Proposition 18 : Si $f : U \to \mathbb{R}$ admet un minimum (resp. maximum) local en $a \in U$ et f est deux fois différentiable en a.
Alors : $d_a f = 0$ et $\forall h \in E$, $d_a^2 f(h;h) \geq 0$ (resp. $d_a^2 f(h;h) \leq 0$).

Remarque 19 : On appelle hessienne de f en a la forme quadratique $d_a^2 f = \mathrm{Hess}(f)(a) : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ h \mapsto \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j \end{array}$
de matrice symétrique $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j}$

Définition 20 : On dit qu'un point critique $a \in U$ est non-dégénéré si $\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right) \neq 0$

Théorème 21 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable et $a \in U$ point critique.
Alors : (1) Si $q := d_a^2 f$ est coercive positive (i.e. $\exists \varepsilon_0 > 0 \backslash \forall h \in E$, $q(h) \geq \varepsilon_0 \|h\|^2$) alors f a un minimum local strict en a.
En dimension finie, il suffit pour cela que q soit définie positive.
(2) Si $q = d_a^2 f$ est coercive négative (i.e. $\exists \varepsilon_0 > 0 \backslash \forall h \in E$, $q(h) \leq -\varepsilon_0 \|h\|^2$) alors f a un maximum local strict en a.
En dimension finie, il suffit pour cela que q soit définie négative.

Contrexemple 22 : Si q est dégénérée, on ne peut rien conclure.
Pour $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x;y) \mapsto x^2 + \lambda y^4 \end{array}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $(0;0)$ est un minimum local strict si $\lambda > 0$, un minimum local si $\lambda = 0$ et un col dégénéré si $\lambda < 0$.

3] Extremums sous contraintes

Théorème 23 : (des multiplicateurs de Lagrange) (V1) Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f, g : U \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$, $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$ telle que $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$ tel que $d_a g \neq 0$.
Alors : $\exists! \lambda \in \mathbb{R} \backslash d_a f = \lambda d_a g$

Remarque 24 : λ est appelé multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $g = 0$.

Exemple 25 : Pour $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x;y) \mapsto x+y \end{array}$ restreinte à $\Gamma = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 = 1\}$
si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum $(a;b) \in \Gamma$ tel que $d_{(a;b)} \neq 0$,
alors $\begin{cases} 1 + 4\lambda a^3 = 0 \\ 1 + 4\lambda b^3 = 0 \end{cases}$ d'où un minimum local en $(-2^{-\frac{1}{4}}; -2^{-\frac{1}{4}})$
et un maximum local en $(2^{-\frac{1}{4}}; 2^{-\frac{1}{4}})$

Théorème 26 : (des multiplicateurs de Lagrange) (V2) Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f \in \mathcal{C}^1(U;\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}^1(U;\mathbb{R}^p)$, $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$ telle que $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$ et $d_a g$ est surjective.
Alors : $\exists! (\lambda_1; \dots; \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \backslash d_a f = \lambda_1 d_a g_1 + \dots + \lambda_p d_a g_p$

Application 27 : (Inégalité arithmético-géométrique)
Soit $(x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}_+^n$.
Alors : $\prod_{i=1}^n x_i \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^n$ ou $\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$

V.1 [EIAm]

V.1 [EIAm]

V.1 [EIAm]

V.3 [EIAm]

III] Recherche numérique

1] Méthode de Newton

Soit $f : [c;d] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, $c<d$, $f(c)<0<f(d)$ et que $\forall x \in [c;d]$, $f'(x)>0$. Soit $F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

IV. exo 49

Lemme 28 : f admet un unique point fixe $a \in]c;d[$ et $\forall x \in [c;d]$, $\exists z \in [a;x] \setminus F(x) - a = \frac{1}{2}\frac{f''(z)}{f'(x)}(x-a)^2$

Lemme 29 : Il existe $C>0$ tel que : $\forall x \in [c;d]$, $|F(x)-a| \leq C|x-a|^2$ et il existe $\alpha>0$ tel que $I := [a-\alpha; a+\alpha]$ est stable par F.

Théorème 30 : (méthode de Newton) Soit $x_0 \in I$.

[Nou]

Alors : (x_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = F(x_n)$ vérifie $x_n \xrightarrow[+\infty]{} a$.

Corollaire 31 : Si de plus $f''>0$, alors $I = [a;d]$ est stable par F et $\forall x_0 \in I$, (x_n) est strictement décroissante avec : $0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$ et $x_{n+1} - a \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$

Application 32 : Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - y$. Alors la méthode de Newton permet d'approcher $\sqrt{y}$.

2] Pour les inégalités de concentration

[Ber]

Lemme 33 : Soit X v.a. réelle, $\mathbb{P}$-p.s. bornée par 1, centrée. Alors : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \exp(\frac{t^2}{2})$

Théorème 34 : (inégalité de Hoeffding) Soit (X_n) v.a. réelles indépendantes, bornées p.s., centrées telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists c_n > 0 \setminus |X_n| \leq c_n$ et soit $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2\exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\right]$

Application 35 : Soit $X_1, \dots, X_n$ v.a. iid de loi $\mathcal{B}(1;p)$ pour $p \in]0;1[$.

Alors : $\forall \alpha \in]0;1[$, $\left[\frac{1}{n}S_n - \sqrt{\frac{2}{n}\ln(\frac{2}{\alpha})} ; \frac{1}{n}S_n + \sqrt{\frac{2}{n}\ln(\frac{2}{\alpha})}\right]$ est un intervalle de confiance par excès au niveau $1-\alpha$ de p.

3] Méthode des moindres carrés

Soit E, F deux espaces euclidiens, $f \in \mathcal{L}(E;F)$.

VII. exo 23

Proposition 36 : $\exists! f^* \in \mathcal{L}(F;E) \setminus \forall (x,y) \in E \times F$, $\langle f(x); y \rangle = \langle x; f^*(y) \rangle$.

[Gri]

Lemme 37 : Si $q := \dim(E) \leq \dim(F) =: n$ et f injective,

Alors : $\det(f^* \circ f) \neq 0$

Définition 38 : On appelle inverse généralisé de f l'application $\tilde{f} := (f^* \circ f)^{-1} \circ f^*$

Remarque 39 : $\tilde{f} \circ f = id_E$; $f \circ \tilde{f} = p_{Im(f)}$ et si f bijective, $\tilde{f} = f^{-1}$.

Exemple 40 : L'inverse généralisé de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est $\frac{1}{50}\begin{pmatrix} 18 & 15 & -1 \\ -2 & -10 & 14 \end{pmatrix}$.

A.S.

Proposition 41 : Soit $p_{Im(f)} : F \to F$ la projection orthogonale sur $Im(f)$.

Alors : $p = f \circ (f^* \circ f)^{-1} \circ f^*$

Définition 42 : Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$, $x \in \mathbb{C}^n$ et $b \in \mathbb{C}^p$. On appelle solution des moindres carrés le vecteur $x_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$\|Ax_0 - b\| = \inf_{x \in \mathbb{C}^n} \|Ax - b\|$$

Théorème 43 : Dans ce cas, la solution des moindres carrés du système $Ax = b$ est : $x_0 = \tilde{A}b$

Exemple 44 : La solution des moindres carrés pour :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} \text{ est } x_0 = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 48 - a \\ -22 + 14a \end{pmatrix}$$

Références :

[ElAm] Calcul Différentiel — El Amrani

[GouAn] Les maths en tête Analyse — Gourdon

[Li] Cours d'analyse fonctionnelle — Li

[Les] 131 développements pour l'oral — Lesesvre

[Rou] Petit guide de calcul différentiel — Rouvière

[Ber] Analyse pour l'agrégation de mathématiques — Bernis

[Gri] Algèbre Linéaire — Grifone